

### Zadatak 1

Jedinstveni faktor rasta urbanog područja za naredni 20-godišnji period je 1,8. Područje je podeljeno na četiri saobraćajne zone. Saobraćajnim istraživanjem utvrđeni su broj međuzonskih putovanja u baznoj godini i faktori rasta svake zone za prognozni period.

Matrica putovanja u baznoj godini i faktori rasta

iz\u	1	2	3	4	$\sum t_{ij}$	$F_j$
1	-	1000	2000	0	3000	2.5
2	1000	-	2000	0	3000	1.0
3	2000	2000	-	0	4000	1.5
4	0	0	0	-	0	0

Izračunati broj međuzonskih putovanja za naredni 20-godišnji period primenom metoda faktora rasta:

- jedinstvenog faktora porasta
- prosečnog faktora porasta
- Fratar metodom
- Detroit metodom.

Proračun izvršiti samo za prvu iteraciju.

#### Rešenje:

$$a) T_{ij} = t_{ij} \cdot F$$

$$F = 1,8$$

$$T_{12} = t_{12} \cdot F = 1000 \cdot 1,8 = 1800$$

$$T_{13} = t_{13} \cdot F = 2000 \cdot 1,8 = 3600 \text{ itd.}$$

Buduća međuzonska razmena izračunata metodom jedinstvenog faktora porasta

iz\u	1	2	3	4	$\sum$
1	-	1800	3600	0	5400
2	1800	-	3600	0	5400
3	3600	3600	-	0	7200
4	0	0	0	-	0
$\sum$	5400	5400	7200	0	

b)

$$T_{ij} = t_{ij} \frac{F_i + F_j}{2}$$

$$T_{12} = t_{12} \frac{F_1 + F_2}{2} = 1000 \cdot \frac{2,5 + 1}{2} = 1750$$

$$T_{13} = t_{13} \frac{F_1 + F_3}{2} = 2000 \cdot \frac{2,5 + 1,5}{2} = 4000 \text{ itd.}$$

Buduća međuzonska razmena izračunata metodom prosečnog faktora porasta

iz\u	1	2	3	4
1	-	1750	4000	0
2	1750	-	2500	0
3	4000	2500	-	0
4	0	0	0	-

c)

$$T_{ij} = T_{ig} \frac{t_{ij} \cdot F_j}{\sum_{j=1}^n t_{ij} F_j}$$

Ulazni podaci za primenu Fratar modela

	1	2	3	4
$\sum t_{ij}$	3000	3000	4000	0
$F_j$	2.5	1.0	1.5	0
$T_{ig}$	7500	3000	6000	0

$$T_{12} = T_{1g} \frac{t_{12} \cdot F_2}{t_{11} \cdot F_1 + t_{12} \cdot F_2 + t_{13} \cdot F_3 + t_{14} \cdot F_4}$$

$$= 7500 \frac{1000 \cdot 1}{1000 \cdot 1 + 2000 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0} = 1875$$

$$T_{13} = T_{1g} \frac{t_{13} \cdot F_3}{t_{11} \cdot F_1 + t_{12} \cdot F_2 + t_{13} \cdot F_3 + t_{14} \cdot F_4}$$

$$= 7500 \frac{2000 \cdot 1.5}{1000 \cdot 1 + 2000 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0} = 5625$$

$$T_{21} = T_{2g} \frac{t_{21} \cdot F_1}{t_{21} \cdot F_1 + t_{22} \cdot F_2 + t_{23} \cdot F_3 + t_{24} \cdot F_4}$$

$$= 3000 \frac{1000 \cdot 2.5}{1000 \cdot 2.5 + 2000 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0} = 1364$$

$$T_{23} = T_{2g} \frac{t_{23} \cdot F_3}{t_{21} \cdot F_1 + t_{22} \cdot F_2 + t_{23} \cdot F_3 + t_{24} \cdot F_4}$$

$$= 3000 \frac{2000 \cdot 1.5}{1000 \cdot 2.5 + 2000 \cdot 1.5 + 0 \cdot 0} = 1637$$

$$T_{31} = T_{3g} \frac{t_{31} \cdot F_1}{t_{31} \cdot F_1 + t_{32} \cdot F_2 + t_{33} \cdot F_3 + t_{34} \cdot F_4}$$

$$= 6000 \frac{2000 \cdot 2.5}{2000 \cdot 2.5 + 2000 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = 4286$$

$$T_{32} = T_{3g} \frac{t_{32} \cdot F_2}{t_{31} \cdot F_1 + t_{32} \cdot F_2 + t_{33} \cdot F_3 + t_{34} \cdot F_4}$$

$$= 6000 \frac{2000 \cdot 1}{2000 \cdot 2.5 + 2000 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = 1714$$

$$T'_{12} = \frac{T_{12} + T_{21}}{2} = \frac{1875 + 1364}{2} = 1620$$

$$T'_{13} = \frac{T_{13} + T_{31}}{2} = \frac{5625 + 4286}{2} = 4956$$

$$T'_{23} = \frac{T_{23} + T_{32}}{2} = \frac{1637 + 1714}{2} = 1676$$

Izlazni rezultat prve iteracije primene Fratar modela

iz\u	1	2	3	4	$\Sigma$
1	-	1620	4956	0	6576
2	1620	-	1676	0	3296
3	4956	1676	-	0	6632
4	0	0	0	-	0
$\Sigma$	6576	3296	6632	0	

d)

$$T_{ij} = t_{ij} \frac{F_i \cdot F_j}{F}$$

$$T_{12} = t_{12} \frac{F_1 \cdot F_2}{F} = 1000 \frac{2.5 \cdot 1}{1.8} = 1389$$

$$T_{13} = t_{13} \frac{F_1 \cdot F_3}{F} = 2000 \frac{2.5 \cdot 1.5}{1.8} = 4167 \text{ itd.}$$

*Izlazni rezultat primene prve iteracije Detroit modela*

iz\u	1	2	3	4	$\Sigma$
1	-	1389	4167	0	
2	1389	-	1667	0	
3	4167	1667	-	0	
4	0	0	0	-	
$\Sigma$	5556	3056			

**Zadatak** Error! No text of specified style in document.

Za područje istraživanja podeljeno na četiri saobraćajne zone, dati su matrica međuzonske razmene putovanja u postojećem stanju i faktori porasta ciljnih putovanja. Na osnovu Fratar modela izvršiti prognozu buduće razmene putovanja između zona.

*Faktori porasta po zonama*

Zone	Fj
1	2,5
2	3
3	1
4	1,5

*Međuzonska razmena kretanja*

izvorne\ciljne	1	2	3	4	$\Sigma t_{ij}$
1	0	65	75	93	233
2	65	0	28	125	218
3	75	28	0	81	184
4	93	125	81	0	299
$\Sigma$	233	218	184	299	

**Rešenje:**

*Ulazni podaci za primenu Fratar modela*

Saobraćajne zone	1	2	3	4
$F^{(1)}_j$	2,5	3	1	1,5
$\Sigma t_{ij}$	233	218	184	299
$T_{ig}$	583	654	184	449

$$T_{ij} = T_{ig} \frac{t_{ij} \cdot F_j}{\sum_{j=1}^n t_{ij} F_j}$$

$$T_{12} = T_{1g} \frac{t_{12} \cdot F_2}{t_{11}F_1 + t_{12}F_2 + t_{13}F_3 + t_{14}F_4} = 583 \frac{65 \cdot 3}{0 \cdot 2,5 + 65 \cdot 3 + 75 \cdot 1 + 93 \cdot 1,5} = 277$$

$$T_{21} = T_{2g} \frac{t_{21} \cdot F_1}{t_{21}F_1 + t_{22}F_2 + t_{23}F_3 + t_{24}F_4} = 654 \frac{65 \cdot 2,5}{65 \cdot 2,5 + 0 \cdot 3 + 28 \cdot 1 + 125 \cdot 1,5} = 281$$

$$T_{13} = T_{1g} \frac{t_{13} \cdot F_3}{t_{11}F_1 + t_{12}F_2 + t_{13}F_3 + t_{14}F_4} = 583 \frac{75 \cdot 1}{0 \cdot 2,5 + 65 \cdot 3 + 75 \cdot 1 + 93 \cdot 1,5} = 107$$

$$T_{31} = T_{3g} \frac{t_{31} \cdot F_1}{t_{31}F_1 + t_{32}F_2 + t_{33}F_3 + t_{34}F_4} = 184 \frac{75 \cdot 2,5}{75 \cdot 2,5 + 28 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 81 \cdot 1,5} = 88$$

$$T_{14} = T_{1g} \frac{t_{14} \cdot F_4}{t_{11}F_1 + t_{12}F_2 + t_{13}F_3 + t_{14}F_4} = 583 \frac{93 \cdot 1,5}{0 \cdot 2,5 + 65 \cdot 3 + 75 \cdot 1 + 93 \cdot 1,5} = 198$$

$$T_{41} = T_{4g} \frac{t_{41} \cdot F_1}{t_{41}F_1 + t_{42}F_2 + t_{43}F_3 + t_{44}F_4} = 449 \frac{93 \cdot 2,5}{93 \cdot 2,5 + 125 \cdot 3 + 81 \cdot 1 + 0 \cdot 1,5} = 151$$

$$T_{24} = T_{2g} \frac{t_{24} \cdot F_4}{t_{21}F_1 + t_{22}F_2 + t_{23}F_3 + t_{24}F_4} = 654 \frac{40 \cdot 1}{65 \cdot 2,5 + 0 \cdot 3 + 28 \cdot 1 + 125 \cdot 1,5} = 324$$

$$T_{42} = T_{4g} \frac{t_{42} \cdot F_2}{t_{41}F_1 + t_{42}F_2 + t_{43}F_3 + t_{44}F_4} = 449 \frac{40 \cdot 2}{93 \cdot 2,5 + 125 \cdot 3 + 81 \cdot 1 + 0 \cdot 1,5} = 244$$

$$T_{32} = T_{3g} \frac{t_{32} \cdot F_2}{t_{31}F_1 + t_{32}F_2 + t_{33}F_3 + t_{34}F_4} = 184 \frac{10 \cdot 2}{75 \cdot 2,5 + 28 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 81 \cdot 1,5} = 39$$

$$T_{23} = T_{2g} \frac{t_{23} \cdot F_3}{t_{21}F_1 + t_{22}F_2 + t_{23}F_3 + t_{24}F_4} = 654 \frac{10 \cdot 3}{65 \cdot 2,5 + 0 \cdot 3 + 28 \cdot 1 + 125 \cdot 1,5} = 48$$

$$T_{34} = T_{3g} \frac{t_{34} \cdot F_4}{t_{31}F_1 + t_{32}F_2 + t_{33}F_3 + t_{34}F_4} = 184 \frac{35 \cdot 1}{75 \cdot 2,5 + 28 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 81 \cdot 1,5} = 57$$

$$T_{43} = T_{4g} \frac{t_{43} \cdot F_3}{t_{41}F_1 + t_{42}F_2 + t_{43}F_3 + t_{44}F_4} = 449 \frac{35 \cdot 3}{93 \cdot 2,5 + 125 \cdot 3 + 81 \cdot 1 + 0 \cdot 1,5} = 53$$

Uprosečene vrednosti međuzonskih putovanja:

$$T_{12'} = \frac{T_{12} + T_{21}}{2} = 279$$

$$T_{13'} = \frac{T_{13} + T_{31}}{2} = 97$$

$$T_{14'} = \frac{T_{14} + T_{41}}{2} = 175$$

$$T_{23'} = \frac{T_{23} + T_{32}}{2} = 44$$

$$T_{24'} = \frac{T_{24} + T_{42}}{2} = 284$$

$$T_{34'} = \frac{T_{34} + T_{43}}{2} = 55$$

Izlazni rezultat prve iteracije primene Fratar modela

izvorne\ciljne	1	2	3	4	$\sum_j T_{ij} = T^{(1)}_i$
1	0	279	97	175	551
2	279	0	44	284	607
3	97	44	0	55	196
4	175	284	55	0	514
$\sum$	551	607	196	514	

\* $(T^{(1)})_i$  – ukupan broj izvornih putovanja dobijen nakon prve iteracije

Izračunavanje faktora za sledeću iteraciju:

$$F_j^{(2)} = \frac{T_{ig}}{T_i^{(1)}}$$

$$F^{(2)}_1 = 583/551 = 1,06$$

$$F^{(2)}_2 = 654/607 = 1,08$$

$$F^{(2)}_3 = 184/196 = 0,94$$

$$F^{(2)}_4 = 449/514 = 0,87$$

### Zadatak 3

Data je postojeća matrica međuzonskih putovanja:

*Matrica putovanja zona-zona*

Izvorne zone	Ciljne zone			
	1	2	3	4
1	-	10	12	18
2	10	-	14	14
3	12	14	-	6
4	18	14	6	-

Modelom generisanja putovanja dobijena je procena budućeg broja putovanja koja iznose 80, 114, 48 i 38, po zonama respektivno. Potrebno je primenom Fratar metoda u prvoj iteraciji izračunati buduću matricu međuzonskih putovanja.

Rešenje:

*Matrica međuzonskih putovanja u baznoj godini*

Izvorne zone	Ciljne zone				$\sum_j t_{ij}$
	1	2	3	4	
1	-	10	12	18	40
2	10	-	14	14	38
3	12	14	-	6	32
4	18	14	6	-	38
$\sum_i t_{ij}$	40	38	32	38	148

Faktori porasta za prvu iteraciju

Izvorne zone	1	2	3	4
$T_{ig}$	80	114	48	38
$\sum t_{ij}$	40	38	32	38
$F^{(1)}_j$	2	3	1,5	1

$$T_{ij} = T_{ig} \frac{t_{ij} \cdot F_j}{\sum_j t_{ij} \cdot F_j}$$

$$T_{12} = \frac{80 \cdot (10 \cdot 3)}{(10 \cdot 3) + (12 \cdot 1,5) + (18 \cdot 1)} = 36,36;$$

$$T_{13} = \frac{80 \cdot (12 \cdot 1,5)}{(10 \cdot 3) + (12 \cdot 1,5) + (18 \cdot 1)} = 21,81;$$

$$T_{14} = \frac{80 \cdot (18 \cdot 1)}{(10 \cdot 3) + (12 \cdot 1,5) + (18 \cdot 1)} = 21,81;$$

$$T_{21} = \frac{114 \cdot (10 \cdot 2)}{(10 \cdot 2) + (14 \cdot 1,5) + (14 \cdot 1)} = 41,45;$$

$$T_{23} = \frac{114 \cdot (14 \cdot 1,5)}{(10 \cdot 2) + (14 \cdot 1,5) + (14 \cdot 1)} = 43,53;$$

$$T_{24} = \frac{114 \cdot (14 \cdot 1)}{(10 \cdot 2) + (14 \cdot 1,5) + (14 \cdot 1)} = 29,10;$$

$$T_{31} = \frac{48 \cdot (12 \cdot 2)}{(12 \cdot 2) + (14 \cdot 3) + (6 \cdot 1)} = 16,00;$$

$$T_{32} = \frac{48 \cdot (14 \cdot 3)}{(12 \cdot 2) + (14 \cdot 3) + (6 \cdot 1)} = 28,00;$$

$$T_{34} = \frac{48 \cdot (6 \cdot 1)}{(12 \cdot 2) + (14 \cdot 3) + (6 \cdot 1)} = 4,00;$$

$$T_{41} = \frac{38 \cdot (18 \cdot 2)}{(18 \cdot 2) + (14 \cdot 3) + (6 \cdot 1,5)} = 15,72;$$

$$T_{42} = \frac{38 \cdot (14 \cdot 3)}{(18 \cdot 2) + (14 \cdot 3) + (6 \cdot 1,5)} = 18,34;$$

$$T_{43} = \frac{38 \cdot (6 \cdot 1,5)}{(18 \cdot 2) + (14 \cdot 3) + (6 \cdot 1,5)} = 3,93.$$

Korigovani elementi međuzonske matrice putovanja:

$$T'_{12} = \frac{T_{12} + T_{21}}{2} = 38,905; \quad T'_{13} = \frac{T_{13} + T_{31}}{2} = 18,905;$$

$$T'_{14} = \frac{T_{14} + T_{41}}{2} = 18,765; \quad T'_{23} = \frac{T_{23} + T_{32}}{2} = 36,765;$$

$$T'_{24} = \frac{T_{24} + T_{42}}{2} = 23,72; \quad T'_{34} = \frac{T_{34} + T_{43}}{2} = 3,965$$

Izlazni rezultat prve iteracije primene Fratar modela

Izvorne zone	Ciljne zone				$\sum_j T_{ij} = T^{(1)}_i$
	1	2	3	4	
1	-	39	19	19	77
2	39	-	37	24	100
3	19	37	-	4	60
4	19	24	4	-	47
$\Sigma$	77	100	60	47	

Proveravamo faktore porasta i njihovo izračunavanje za narednu iteraciju:

$$F^{(2)}_j = T_{ig} / F^{(1)}_{ig}$$

gde je

$T^{(1)}_{ig}$  – ukupan broj izvornih putovanja dobijen nakon prve iteracije

$$F^{(2)}_1 = 80/77 = 1,039$$

$$F^{(2)}_2 = 114/100 = 1,14$$

$$F^{(2)}_3 = 48/60 = 0,8$$

$$F^{(2)}_4 = 38/46,45 = 0,809$$

#### Zadatak 4

U sledećem hipotetičkom primeru dat je postupak primene Fratar modela u gornjem obliku za područje sastavljeno od tri saobraćajne zone sa zatom matricom putovanja zona-zona i zatom faktorima porasta.

*Matrica putovanja zona-zona*

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1	1	4	2	7
2	6	2	3	11
3	4	1	2	7
Ukupno	11	7	7	25

*Faktori porasta*

Zona	1	2	3
Faktor na izvoru	2,0	3,0	4,0
Faktor na cilju	3,0	4,0	2,0

**Rešenje:**

*Prognozirani ukupan broj putovanja (izvornih i ciljnih)*

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1				14
2				33
3				28
Ukupno	33	28	14	75

*Iteracija k=1, izračunavanje Fjk*

Ciljna zona	1	2	3
$T_j$ – prognoza	33	28	14
$\sum T_{ijk}$ - postojeće	11	7	7
$F_{jk}$ 3,00	4,00	2,00	

Faktorisanamatrixaputovanja – iteracijak=1

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1	3,00	16,00	4,00	23,00
2	18,00	8,00	6,00	32,00
3	12,00	4,00	4,00	20,00
Ukupno	33,00	28,00	24,00	75,00

Iteracijak=1 –izračunavanje $F_{ik}$

Izvorna zona	1	2	3
$T_i$ – prognoza	14	33	28
$\sum(T_{ijk} F_{jk})$ -stanje	23,00	32,00	20,00
$F_{ik}$ 0,61	1,03	1,40	

Izlaznirezultatiteracijek=1 –matrixaputovanjazona-zona

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1	2	10	2	14
2	19	8	6	33
3	16	6	6	28
Ukupno	37	24	14	75

Iteracijak=2, izračunavanje $F_{jk}$

Ciljna zona	1	2	3
$T_j$ – prognoza	33	28	14
$\sum T_{ijk}$ -	37	24	14
$F_{jk}$ 0,89	1,17	1,00	

Faktorisanamatrixa – iteracijak=2

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1	1,78	11,70	2,00	15,48
2	16,90	9,36	6,00	32,26
3	14,24	7,02	6,00	27,26
Ukupno	32,92	28,08	14,00	75,00

Iteracija k=2, izračunavanj  $F_{ik}$

Izvorna zona	1	2	3
$T_i$ – prognoza	14	33	28
$\sum(T_{ijk} F_{jk})$	15,48	32,26	27,26
$F_{ik}$	0,90	1,02	1,03



Izlazni rezultati iteracije  $k=2$  – matrica putovanja zona-zona

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1	2	10	2	14
2	17	10	6	33
3	15	7	6	28
Ukupno	34	27	14	75

Iteracija  $k=3$ , izračunavanje  $F_{jk}$

Ciljna zona	1	2	3
$T_j$ – prognoza	33	28	14
$\sum T_{ijk}$ -	34	27	14
$F_{jk}$	0,97	1,04	1,00

Faktorizirana matrica putovanja – iteracija  $k=3$

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1	1,94	10,40	2,00	14,34
2	16,43	10,40	6,00	32,83
3	14,55	7,28	6,00	27,83
Ukupno	32,92	28,08	14,00	75,00

iteracijak=3, izračunavanje $F_{ik}$

Izvorna zona	1	2	3
$T_i$ – prognoza	14	33	28
$\sum (T_{ijk} F_{jk})$	14,34	32,83	27,83
$F_{ik}$	0,98	1,01	1,01

Izlazni rezultat iteracije  $k=3$  – matrica putovanja zona-zona

Izvor / Cilj	1	2	3	Ukupno
1	2	10	2	14
2	16	11	6	33
3	15	7	6	28
Ukupno	33	28	14	75

### Zadatak 5

Dat je hipotetički model grada podjeljenog na pet saobraćajnih zona prema priloženoj šemi, kao i razmeštaj stanovnika i radnih mesta unutar tih pet zona:

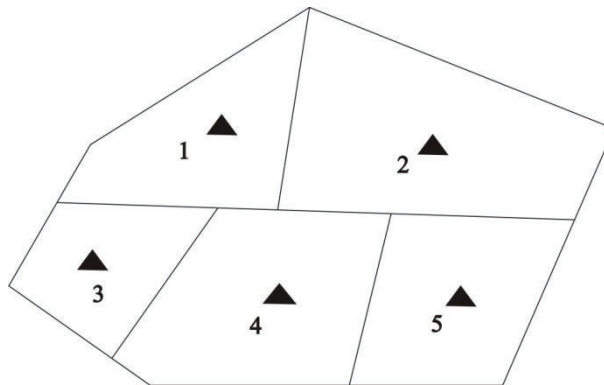
#### Socio-ekonomski podaci područja istraživanja

Zona	Stanovništvo	Broj radnih mesta
1	3500	920
2	2500	2900
3	3200	2200
4	1500	800
5	3500	1000
<b>Ukupno</b>	<b>14200</b>	<b>7820</b>

Rastojanja između zona su sledeća:

$d_{12} = d_{21} = 750$  m;  $d_{13} = d_{31} = 500$  m;  $d_{14} = d_{41} = 550$  m;  $d_{15} = d_{51} = 1270$  m;  
 $d_{23} = d_{32} = 930$  m,  $d_{24} = d_{42} = 750$  m;  $d_{25} = d_{52} = 670$  m;  $d_{34} = d_{43} = 400$  m;  
 $d_{35} = d_{53} = 1400$  m;  $d_{45} = d_{54} = 870$  m

Ukoliko je pretpostavka da se radi o zatvorenom modelu grada odnosno, da su svi zaposleni iz datog grada, primenom gravitacionog modela izračunati broj putovanja "stan-posao" između svakog para zona.



*Položaj zona hipotetičkog modela grada*

Za izračunavanje vrednosti funkcije otpora koristiti dijagram, čije su neke od vrednosti date u narednoj tabeli:

*Vrednost funkcije otpora  $F_{ij} = f(d_{ij})$ :*

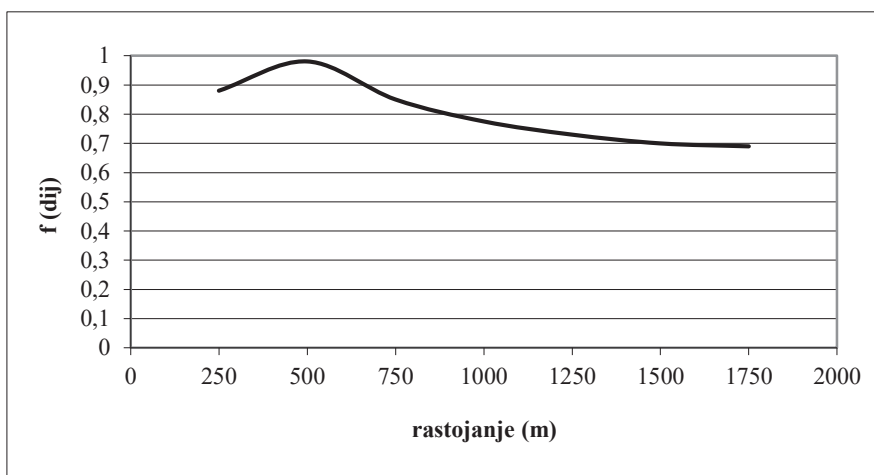
$F_{ij} = f(d_{ij})$	0,88	0,98	0,85	0,775	0,73	0,7	0,69
$d_{ij}$ (m)	250	500	750	1000	1250	1500	1750

**Rešenje:**

$$\text{Stepen zaposlenosti } S_z = \frac{\text{ukupan broj radnih mesta}}{\text{broj stanovnika}} = \frac{7820}{14200} = 0,551$$

*Produkcija i atrakcija zone za putovanja "stan-posao" iznose*

Zona	P <sub>i</sub>	A <sub>j</sub>
1	1929	920
2	1377	2900
3	1763	2200
4	827	800
5	1928	1000



*Dijagram funkcije otpora*

Sa dijagrama funkcije otpora, očitavaju se vrednosti za poznata međuzonska rastojanja:

$$\begin{aligned} F_{12} = F_{21} = 0,85; & \quad F_{13} = F_{31} = 0,98; & \quad F_{14} = F_{41} = 0,97; & \quad F_{15} = F_{51} = 0,73; \\ F_{23} = F_{32} = 0,79; & \quad F_{24} = F_{42} = 0,85; & \quad F_{25} = F_{52} = 0,9; & \quad F_{34} = F_{43} = 0,99; \\ F_{35} = F_{53} = 0,72; & \quad F_{45} = F_{54} = 0,81. \end{aligned}$$

Unutarzonska rastojanja i pripadajuće vrednosti funkcije otpora:

$$d_{ii} = \frac{\sum d_{ijs}}{2 \cdot n_s}$$

gde su:

$d_{ii}$  – unutarzonsko rastojanje;

$d_{ijs}$  – međuzonsko rastojanje zone i sa susednom zonom j;

$n_s$  – broj susedenih zona (zone koje se graniče sa zonom i).

$$d_{11} = \frac{d_{12} + d_{13} + d_{14}}{2 \cdot 3} = 300; \quad \Rightarrow F_{11} = 0,94$$

$$d_{22} = \frac{d_{21} + d_{24} + d_{25}}{2 \cdot 3} = 362; \quad \Rightarrow F_{22} = 0,975$$

$$d_{33} = \frac{d_{31} + d_{34}}{2 \cdot 2} = 225; \quad \Rightarrow F_{33} = 0,765$$

$$d_{44} = \frac{d_{41} + d_{42} + d_{43} + d_{45}}{2 \cdot 4} = 321; \quad \Rightarrow F_{44} = 0,94$$

$$d_{55} = \frac{d_{54} + d_{52}}{2 \cdot 2} = 385; \quad \Rightarrow F_{55} = 0,98$$

Određivanje  $\sum_{j=1}^n f(d_{ij})A_j$ ; (n- broj saobraćajnih zona, n= 1,...5):

$$i = 1, \sum_{j=1}^5 f(d_{ij})A_j = A_1F_{11} + A_2F_{12} + A_3F_{13} + A_4F_{14} + A_5F_{15} = 6991,8;$$

$$i = 2, \sum_{j=1}^5 f(d_{ij})A_j = A_1F_{21} + A_2F_{22} + A_3F_{23} + A_4F_{24} + A_5F_{25} = 6927,5;$$

$$i = 3, \sum_{j=1}^5 f(d_{ij})A_j = A_1F_{31} + A_2F_{32} + A_3F_{33} + A_4F_{34} + A_5F_{35} = 6387,6;$$

$$i = 4, \sum_{j=1}^5 f(d_{ij})A_j = A_1F_{41} + A_2F_{42} + A_3F_{43} + A_4F_{44} + A_5F_{45} = 7097,4;$$

$$i = 5, \sum_{j=1}^5 f(d_{ij})A_j = A_1F_{51} + A_2F_{52} + A_3F_{53} + A_4F_{54} + A_5F_{55} = 6493,6.$$

Određivanje broja međuzonskih putovanja primenom gravitacionog modela oblika:

$$T_{ij} = P_i \frac{A_j F_{ij}}{\sum_{j=1}^n A_j F_{ij}} \quad (K_{ij} = \text{const.} = 1)$$

Matrica međuzonskih putovanja  $T_{ij}$

izvorna zona	ciljna zona					$\Sigma$
	1	2	3	4	5	
1	239	680	595	214	201	1929
2	155	562	345	135	179	1377
3	249	632	465	219	199	1763
4	104	287	254	88	94	827
5	199	775	471	192	291	1928

### Zadatak 6

Date su atrakcije i produkcije za tri susedne zone i tablične vrednosti funkcije otpora  $F(d_{ij})$ . Za proizvoljno usvojene vrednosti međuzonskih rastojanja  $d_{ij}$  u rasponu od 0,5 do 3 km izračunati primenom gravitacionog modela broj unutarzonskih putovanja za svaku od posmatranih zona.

Vrednosti dobijene modelom generisanja putovanja

Zona	1	2	3
Produkcija	1250	540	870
Atrakcija	680	1420	560

Vrednosti funkcije otpora

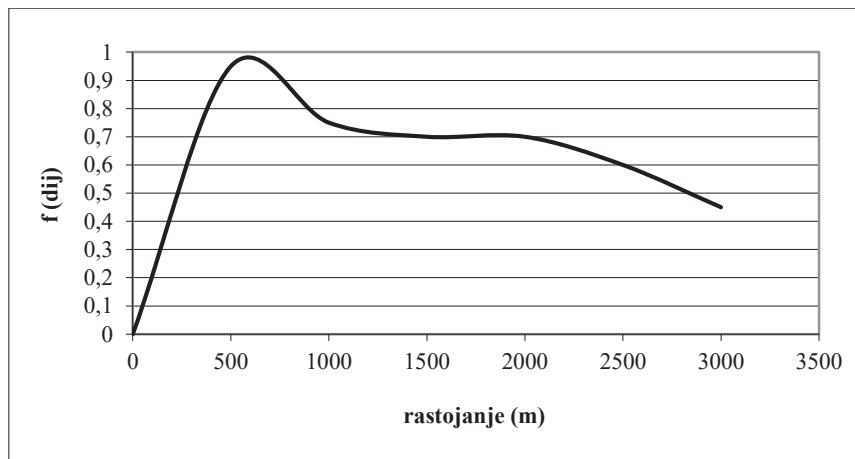
$d_{ij}$ (m)	500	1000	1500	2000	2500	3000
$F_{ij} = f(d_{ij})$	0,95	0,75	0,7	0,7	0,6	0,45

**Rešenje:**

$$d_{12} = d_{21} = 1000 \text{ m};$$

$$d_{13} = d_{31} = 2000 \text{ m};$$

$$d_{23} = d_{32} = 1500 \text{ m}$$



Dijagram funkcije otpora

Za usvojene vrednosti međuzonskih rastojanja iz zadate tabele ili formiranog dijagrama funkcije otpora očitavamo:

$$F_{12} = F_{21} = 0,75$$

$$F_{13} = F_{31} = 0,7$$

$$F_{23} = F_{32} = 0,7$$

Izračunavanje vrednosti funkcije otpora za unutarzonska putovanja, zahteva prethodno izračunavanje unutarzonskih rastojanja:

$$d_{11} = \frac{d_{12} + d_{13}}{2 \cdot 2} = 750; \quad \Rightarrow F_{11} = 0,85$$

$$d_{22} = \frac{d_{21} + d_{23}}{2 \cdot 2} = 625; \quad \Rightarrow F_{22} = 0,9$$

$$d_{33} = \frac{d_{31} + d_{32}}{2 \cdot 2} = 875; \quad \Rightarrow F_{33} = 0,8$$

$$i = 1, \sum_{j=1}^3 A_j F_{1j} = A_1 F_{11} + A_2 F_{12} + A_3 F_{13} = 680 \cdot 0,85 + 1420 \cdot 0,75 + 560 \cdot 0,7 = 2035;$$

$$i = 2, \sum_{j=1}^3 A_j F_{2j} = A_1 F_{21} + A_2 F_{22} + A_3 F_{23} = 680 \cdot 0,75 + 1420 \cdot 0,9 + 560 \cdot 0,7 = 2180;$$

$$i = 3, \sum_{j=1}^3 A_j F_{3j} = A_1 F_{31} + A_2 F_{32} + A_3 F_{33} = 680 \cdot 0,7 + 1420 \cdot 0,7 + 560 \cdot 0,8 = 1918.$$

Određivanje broja unutarzonskih putovanja  $T_{ii}$  :

$$T_{11} = P_1 \frac{A_1 F_{11}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{1j}} = 1250 \cdot \frac{680 \cdot 0,85}{2035} = 355;$$

$$T_{22} = P_2 \frac{A_2 F_{22}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{2j}} = 540 \cdot \frac{1420 \cdot 0,9}{2180} = 317;$$

$$T_{33} = P_3 \frac{A_3 F_{33}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{3j}} = 870 \cdot \frac{560 \cdot 0,8}{1918} = 203.$$

### Zadatak 7

Date su tri međusobno susedne saobraćajne zone sa brojem stanovnika i radnih mesta za svaku zonu:

#### Socio-ekonomski podaci saobraćajnih zona

Zona	Broj stanovnika	Broj radnih mesta
1	800	1450
2	1950	1550
3	1500	1250

Produkcija zone:  $P = 0,375 S + 0,06RM - 56$

Atrakcija zone :  $A = 0,870 RM - 65$

Vrednosti funkcije otpora  $F_{ij} = f(t_{ij})$  date su u sledećoj tabeli.

#### Vrednosti funkcije otpora $F_{ij} = f(t_{ij})$

<b><math>t_{ij}(\text{min})</math></b>	0	2	4	8	12	16	20
<b><math>F_{ij} = f(t_{ij})</math></b>	0	0,95	0,75	0,7	0,45	0,3	0,25

Brzina putovanja je uniformna i iznosi:  $V = 15\text{km/h}$

Ako su date vrednosti međuzonskih rastojanja:

$$d_{12} = 1250 = d_{21}; \quad d_{23} = 2150 = d_{32}; \quad d_{31} = 3450 = d_{13}.$$

Izračunati:

- Atrakciju (A) i produkciju (P) za svaku zonu.
- Primenom gravitacionog modela izračunati matricu međuzonskih putovanja.

### Rešenje:

a)

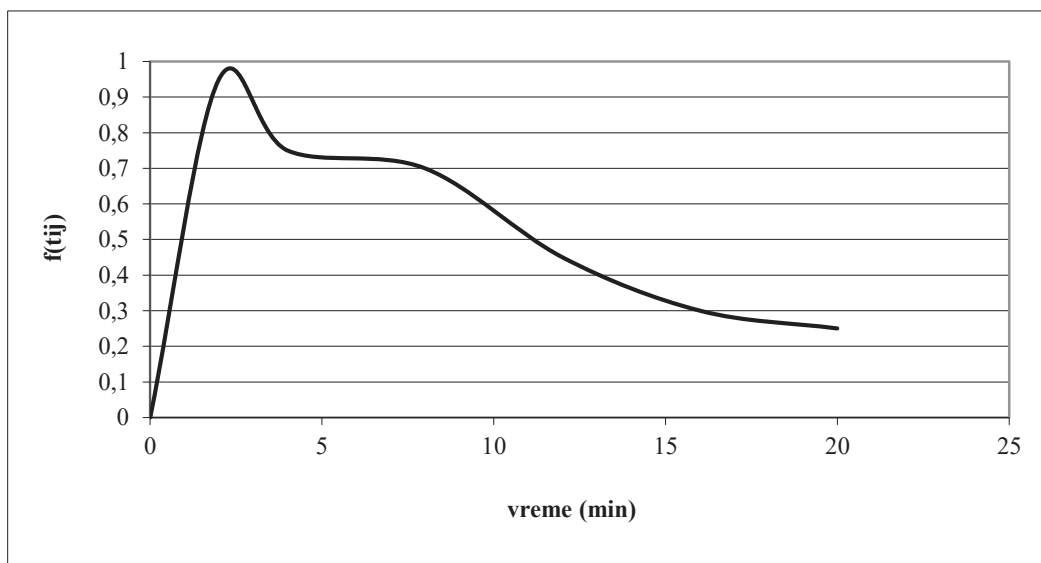
#### Rezultat proračuna vrednosti atrakcije i produkcije

Zone	Atrakcija	Produkcija
1	1197	331
2	1284	768
3	1023	582

b)

$$\begin{aligned}d_{12} = 1250 = d_{21} &\Rightarrow t_{12} = t_{21} = 5 \text{ min} \\d_{23} = 2150 = d_{32} &\Rightarrow t_{23} = t_{32} = 8,6 \text{ min} \\d_{31} = 3450 = d_{13} &\Rightarrow t_{31} = t_{13} = 13,8 \text{ min}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_{11} &= \frac{d_{12} + d_{13}}{2 \cdot 2} = 1175; &\Rightarrow t_{11} &= 4,7 \text{ min} \\d_{22} &= \frac{d_{21} + d_{23}}{2 \cdot 2} = 850; &\Rightarrow t_{22} &= 3,4 \text{ min} \\d_{33} &= \frac{d_{31} + d_{32}}{2 \cdot 2} = 1400; &\Rightarrow t_{33} &= 5,6 \text{ min}\end{aligned}$$



*Dijagram funkcije otpora*

Za određene vrednosti vremena putovanja između zona, sa dijagrama se očitavaju funkcije otpora :

$$\begin{aligned}F_{12} = F_{21} &= 0,7375 & F_{23} = F_{32} &= 0,67 & F_{31} = F_{13} &= 0,375 \\F_{11} &= 0,74 & F_{22} &= 0,81 & F_{33} &= 0,73\end{aligned}$$

-Određivanje:  $\sum_{j=1}^n A_j F_{ij}$

$$i = 1, \sum_{j=1}^3 A_j F_{1j} = A_1 F_{11} + A_2 F_{12} + A_3 F_{13} = 1197 \cdot 0,74 + 1284 \cdot 0,7375 + 1023 \cdot 0,375 = 2216,35;$$

$$i = 2, \sum_{j=1}^3 A_j F_{2j} = A_1 F_{21} + A_2 F_{22} + A_3 F_{23} = 1197 \cdot 0,7375 + 1284 \cdot 0,81 + 1023 \cdot 0,67 = 2608,2;$$

$$i = 3, \sum_{j=1}^3 A_j F_{3j} = A_1 F_{31} + A_2 F_{32} + A_3 F_{33} = 1197 \cdot 0,375 + 1284 \cdot 0,67 + 1023 \cdot 0,73 = 2055,94.$$

- Određivanje broja međuzonskih putovanja  $T_{ij}$  :

$$T_{11} = P_1 \frac{A_1 F_{11}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{1j}} = 331 \cdot \frac{1197 \cdot 0,74}{2216,335} = 132;$$

$$T_{12} = P_1 \frac{A_2 F_{12}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{1j}} = 331 \cdot \frac{1284 \cdot 0,7375}{2216,355} = 142;$$

$$T_{13} = P_1 \frac{A_3 F_{13}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{1j}} = 331 \cdot \frac{1023 \cdot 0,375}{2216,355} = 57;$$

$$T_{22} = P_2 \frac{A_2 F_{22}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{2j}} = 768 \cdot \frac{1248 \cdot 0,81}{2608,24} = 306;$$

$$T_{21} = P_2 \frac{A_1 F_{21}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{2j}} = 768 \cdot \frac{1197 \cdot 0,7375}{2608,24} = 260;$$

$$T_{23} = P_2 \frac{A_3 F_{23}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{2j}} = 768 \cdot \frac{1023 \cdot 0,67}{2608,24} = 202;$$

$$T_{23} = P_2 \frac{A_3 F_{23}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{2j}} = 768 \cdot \frac{1023 \cdot 0,67}{2608,24} = 202;$$

$$T_{33} = P_3 \frac{A_3 F_{33}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{3j}} = 582 \cdot \frac{1023 \cdot 0,73}{2055,945} = 211;$$

$$T_{31} = P_3 \frac{A_1 F_{31}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{3j}} = 582 \cdot \frac{1197 \cdot 0,375}{2055,945} = 127;$$

$$T_{32} = P_3 \frac{A_2 F_{32}}{\sum_{j=1}^3 A_j F_{3j}} = 582 \cdot \frac{1284 \cdot 0,67}{2055,945} = 244;$$

### Zadatak 8

Dat je broj stanovnika i zaposlenih po zonama

*Socio-ekonomski podaci područja istraživanja*

Zona	Stanovništvo	Broj zaposlenih po mestu rada
1	450	1800
2	8000	1200
3	1600	600
4	2650	1500
5	0	1009
$\Sigma$	12700	6109

Polazne pretpostavke su da se proračun odnosi na fiktivno gradsko područje i samo na putovanja automobilom u privatnom vlasništvu. Takođe se pretpostavlja povećanje broja automobila i prema predviđanju za sledeću godinu on će iznositi 0,37 automobila po stanovniku podjednako za sve zone.



Za date vrednosti funkcije otpora u narednoj tabeli, kao i za datu stopu nastajanja (učestanost) putovanja od 1,3 putovanja po registrovanom automobile dnevno za putovanja stan-posao, primenom gravitacionog modela odrediti broj putovanja automobilom za putovanja stan-posao između svakog para zona. Rezultate prikazati matricno.

Zadate vrednosti funkcije otpora

Zona	1	2	3	4	5
1	1.00	0.70	0.80	0.79	0.86
2	0.70	0.85	0.70	0.61	0.66
3	0.80	0.70	0.80	0.86	0.70
4	0.79	0.61	0.86	0.95	0.76
5	0.86	0.66	0.70	0.76	0.78

**Rešenje:**

**Određivanje  $P_i$ , broja putovanja koja izviru u zoni "i"**

$P_i = \text{stanovništvo zone "i"} \times \text{posjedovanje automobila} \times \text{stopa nastajanja putovanja}$

$$P_1 = 450 \cdot 0,37 \cdot 1,3 = 217$$

$$P_2 = 8000 \cdot 0,37 \cdot 1,3 = 3848$$

$$P_3 = 1600 \cdot 0,37 \cdot 1,3 = 770$$

$$P_4 = 2650 \cdot 0,37 \cdot 1,3 = 1275$$

$$P_5 = 0 \cdot 0,37 \cdot 1,3 = 0$$

**Određivanje  $A_j$ , privlačenja zonom "j" (mera privlačenja je broj zaposlenih u odredišnim zonama)**

$$A_1 = 1800$$

$$A_4 = 1500$$

$$A_2 = 1200$$

$$A_5 = 1009$$

$$A_3 = 600$$

**Određivanje  $\sum_{j=1}^n F(d_{ij})A_j$**

$$i=1;$$

$$\sum_{j=1}^n f(d_{1j})A_j = F_{11}A_1 + F_{12}A_2 + F_{13}A_3 + F_{14}A_4 + F_{15}A_5 + F_{1-10}A_{10} + F_{1-11}A_{11}$$

$$= 1.00 \cdot 1800 + 0.70 \cdot 1200 + 0.80 \cdot 600 + 0.79 \cdot 1500 + 0.86 \cdot 1009 = 5173$$

$$i=2; \sum_{j=1}^n f(d_{2j})A_j = 4281$$

$$i=3; \sum_{j=1}^n f(d_{3j})A_j = 4757$$

$$i=4; \sum_{j=1}^n f(d_{4j})A_j = 4862$$

$$i=5; \sum_{j=1}^n f(d_{5j})A_j = 4687$$

**Određivanje  $T_{ij}$ , broja putovanja koja izviru u zoni „i“, a privučena su zonom „j“**

$$T_{ij} = P_i \frac{f(d_{ij})A_j}{\sum_{j=1}^n f(d_{ij})A_j}$$

**Zona 1:**

$$T_{11} = P_1 \frac{f(d_{11})A_1}{\sum_{j=1}^n f(d_{ij})A_j} = 217 \frac{1.00 \cdot 1800}{5173} = 76$$

$$T_{12} = P_1 \frac{f(d_{12})A_2}{\sum_{j=1}^n f(d_{ij})A_j} = 217 \frac{0.70 \cdot 1200}{5173} = 35$$

$$T_{13} = P_1 \frac{f(d_{13})A_3}{\sum_{j=1}^n f(d_{ij})A_j} = 217 \frac{0.80 \cdot 600}{5173} = 20$$

$$T_{14} = P_1 \frac{f(d_{14})A_4}{\sum_{j=1}^n f(d_{ij})A_j} = 217 \frac{0.79 \cdot 1500}{5173} = 50$$

$$T_{15} = P_1 \frac{f(d_{15})A_5}{\sum_{j=1}^n f(d_{ij})A_j} = 217 \frac{0.86 \cdot 1009}{5173} = 36$$

Provera:  $\sum_{j=1}^n T_{1j} = 76 + 35 + 20 + 50 + 36 = 217 = P_1 = 217$

**Zona 2:**

$$T_{21} = P_2 \frac{f(d_{21})A_1}{\sum_{j=1}^n f(d_{2j})A_j} = 3848 \frac{0.70 \cdot 1800}{4281} = 1133 \text{ itd.}$$

*Rezultati matrice izvorno-ciljnih kretanja za svrhu „stan-posao“*

Zone izviranja	Zone privlačenja					Ukupno
	1	2	3	4	5	
1	75	35	20	50	36	217
2	1133	917	377	822	599	3848
3	233	136	78	209	114	770
4	373	192	135	374	201	1275
5	0	0	0	0	0	0